

# 曲线曲面

计算机图形学——原理、方法及应用（第4版），潘云鹤、童若锋、耿卫东、唐敏、童欣，高等教育出版社，2022。

# 内 容

- 基础知识
- **Bézier** 曲线曲面
- **NURBS** 曲线曲面
- 细分曲线曲面

# 曲线分类

•  $y = x^2 + 5x + 3$   $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$   $y = f(x)$   
(显式曲线)

$$\begin{aligned} x &= x_c + r \cdot \cos \theta \\ y &= y_c + r \cdot \sin \theta \end{aligned} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

(参数曲线)

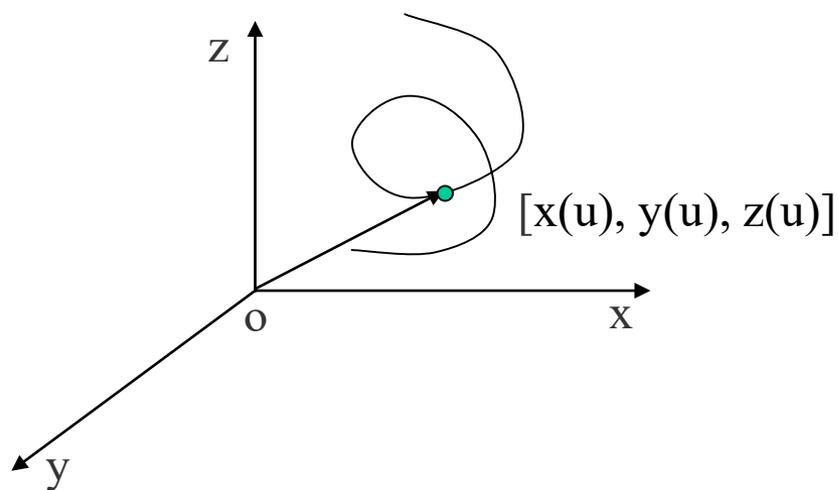
$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - r^2 = 0 \xrightarrow{\hspace{2cm}} g(x, y) = 0$$

(隐式曲线)

使用最多的是参数曲线

# 参数曲线

- 自变量是标量，函数是向量:  $\mathbf{C}=\mathbf{C}(u)=[x(u), y(u), z(u)]$ , 向量的各分量都是自变量的函数，当自变量变化时，以函数向量为坐标的点构成一条曲线。



# 参数

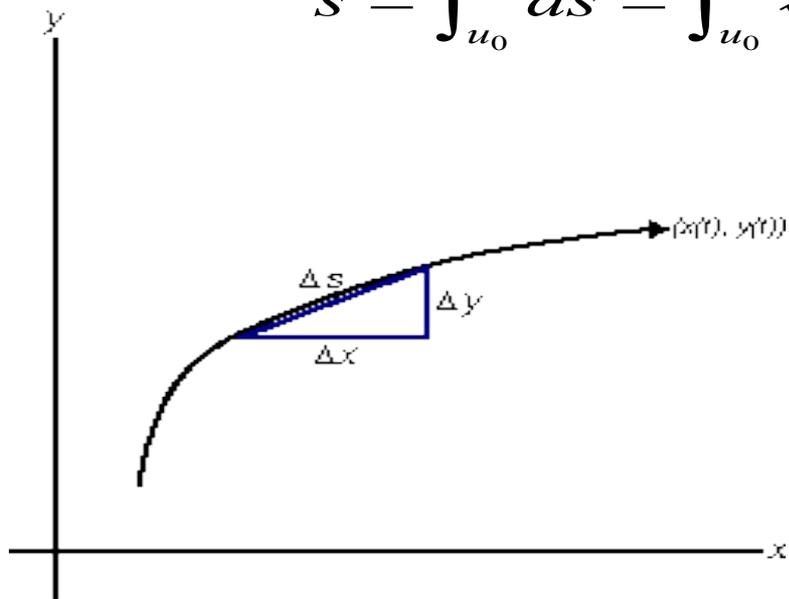
$C(u)$ 为参数曲线, 则它的切向 $T=C'(u)$ .

弧长的微分:

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2=((x')^2+(y')^2+(z')^2)d^2u$$

• 弧长:

$$s = \int_{u_0}^u ds = \int_{u_0}^u \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} du$$



# 参数曲线的优点

- 1) 有更大的自由度控制曲线曲面的形状;
- 2) 可对参数曲线曲面的方程直接进行几何变换, 而不需要对曲线曲面的每个数据点进行几何变换;
- 3) 可以处理斜率无穷大的情况;
- 4) 代数、几何相关和无关的变量是完全分离的, 对变量个数不限, 便于将低维空间中的曲线曲面扩展到高维空间中;

# 曲线段间的连续性定义

- 连续性：

$C^0$ 连续（0阶参数连续）——前一段曲线的终点与后一段曲线的起点相同。

$C^1$ 连续（一阶参数连续）——两相邻曲线段的连接点处有相同的一阶导数。

$C^2$ 连续（二阶参数连续）——两相邻曲线段的连接点处有相同的一阶导数和二阶导数。

# Bézier 曲线

## Bézier 曲线的定义

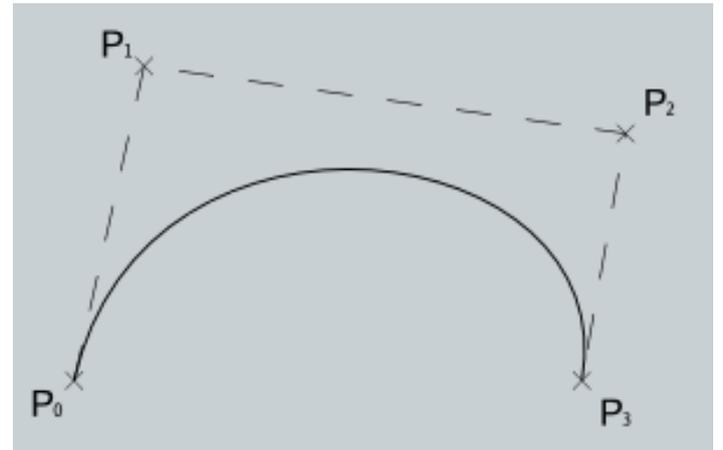
$$C(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t), \quad t \in [0, 1]$$

,  $P_i (i=0,1,\dots,n)$  为控制顶点.

$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}, t \in [0,1]$  为Bernstein 基

$$\begin{cases} X(t) = \sum_{i=0}^n x_i B_{i,n}(t) \\ Y(t) = \sum_{i=0}^n y_i B_{i,n}(t) \end{cases}$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}, \quad P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$



# Bézier 曲线

## Bézier curve

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t) = \sum_{i=0}^n x_i B_{i,n}(t) \\ \mathbf{Y}(t) = \sum_{i=0}^n y_i B_{i,n}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \\ \mathbf{Y}(t) = \sum_{i=0}^n b_i t^i \end{cases}$$

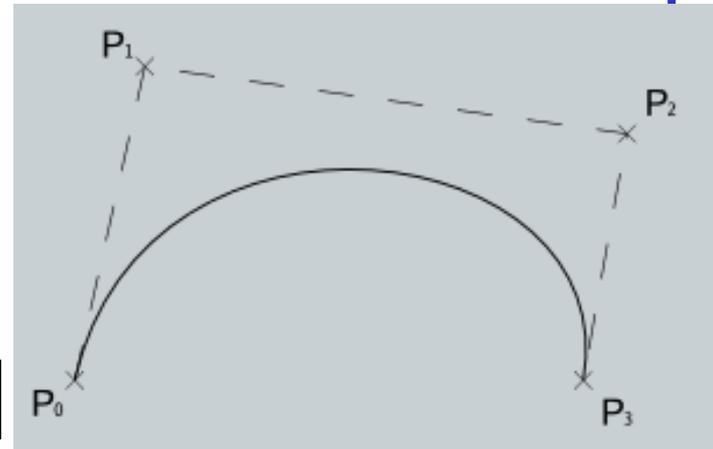
$1, t, t^2, t^3$

$$B_{0,n}(t) \quad B_{1,n}(t) \quad B_{2,n}(t) \quad \cdots \quad B_{n,n}(t)$$

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}, t \in [0,1]$$

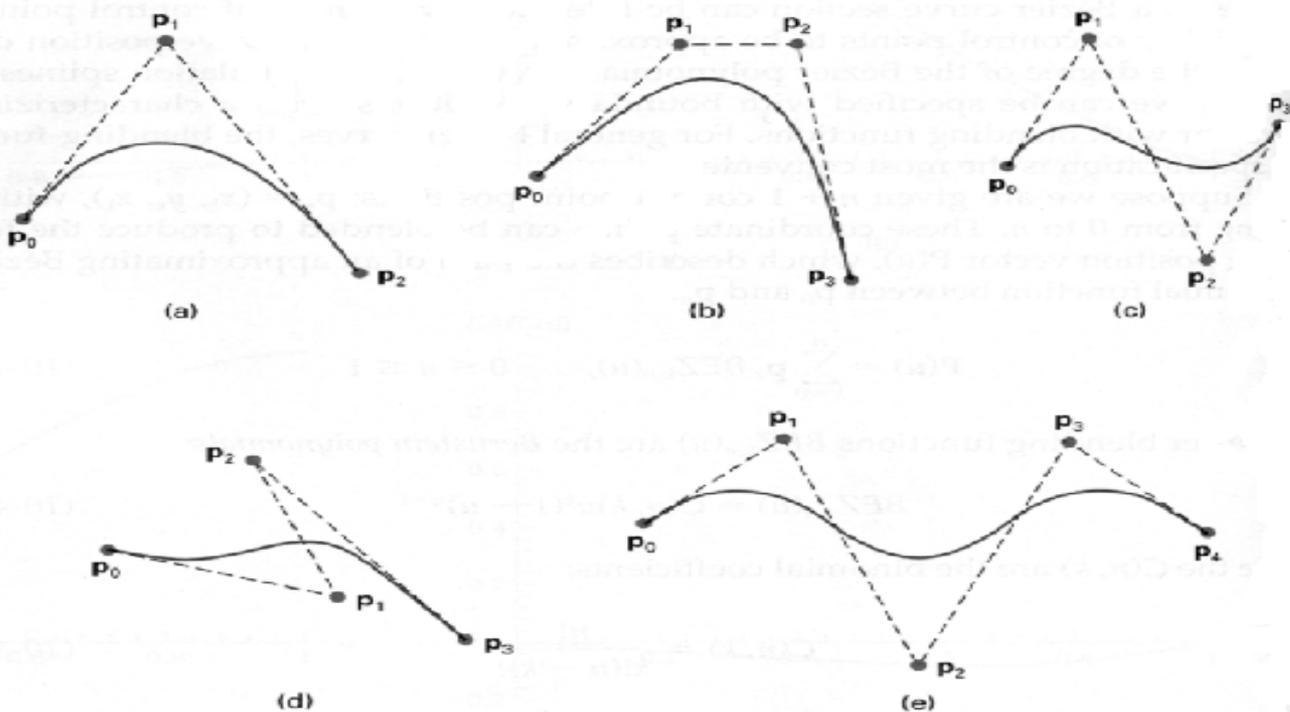
$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \mathbf{Y}(t) \end{pmatrix}, \quad P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t), \quad t \in [0,1]$$



# Bezier曲线

- $P_0, P_1, \dots, P_n$  各点为  $C(u)$  的控制顶点，一般称折线  $P_0, P_1, \dots, P_n$  为  $C(u)$  的控制多边形。控制多边形是  $C(u)$  的大致形状的勾画； $C(u)$  是对  $P_0, P_1, \dots, P_n$  的逼近。



# Bezier曲线

**Bernstein基函数**具有下列性质：

1) 非负性：

对于所有的 $i, n$ 以及 $0 \leq u \leq 1$  均有

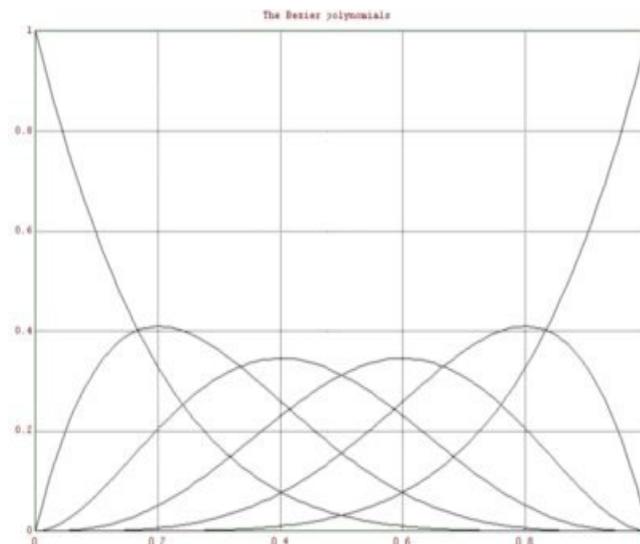
$B_{i,n} \geq 0$  成立；

2) 规范性：

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \equiv 1, \quad 0 \leq u \leq 1$$

3) 对称性

$$B_{i,n}(u) = B_{n-i,n}(1-u), \quad i = 0, 1, \dots, n$$



# Bezier曲线

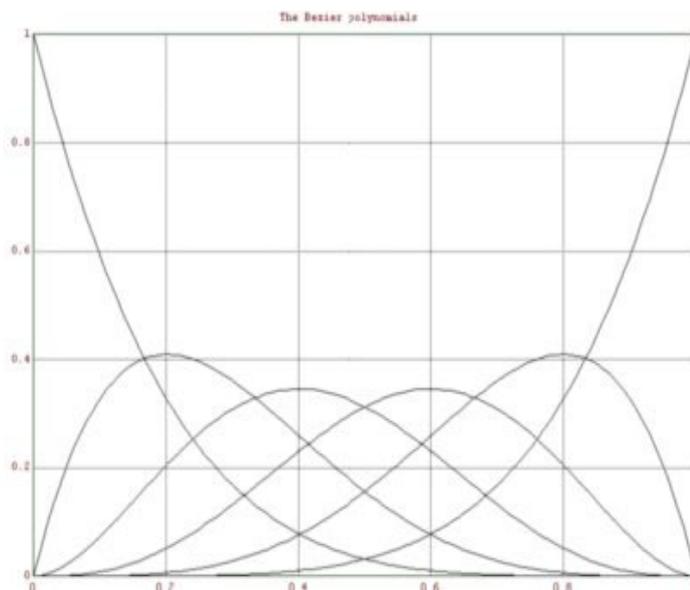
4) 递推性

$$B_{i,n}(u) = (1-u) B_{i,n-1}(u) + u B_{i-1,n-1}(u), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

5) 端点性

$$B_{i,n}(0) = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 0, & \textit{else} \end{cases}$$

$$B_{i,n}(1) = \begin{cases} 1, & i = n \\ 0, & \textit{else} \end{cases}$$



# Bezier曲线

6) 最大性：

$B_{i,n}(u)$  在  $u = i/n$  处达到最大值；

7) 可导性

$$B'_{i,n}(u) = n[B_{i-1,n-1}(u) - B_{i,n-1}(u)], \quad i = 0, 1, \dots, n$$

8) 升阶公式

$$(1-u)B_{i,n}(u) = \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)B_{i,n+1}(u)$$

$$uB_{i,n}(u) = \frac{i+1}{n+1}B_{i+1,n+1}(u)$$

# Bezier曲线

$$B_{i,n}(u) = \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)B_{i,n+1}(u) + \frac{i+1}{n+1}B_{i+1,n+1}(u)$$

9) 分割性

$$B_{i,n}(cu) = \sum_{j=0}^n B_{i,j}(c)B_{j,n}(u)$$

10) 积分性

$$\int_0^1 B_{i,n}(u)du = \frac{1}{n+1}$$

# Bezier曲线

## Bezier曲线的性质

Bezier曲线 $C(u)$ 具有以下性质：

1) 端点性质

$$C(0) = P_0, \quad C(1) = P_n$$

2) 端点切矢量

$$C'(u) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(u)(P_{i+1} - P_i)$$

Bezier曲线在  $P_0$  点处与边  $P_1P_0$  相切，在点  $P_n$  处与边  $P_{n-1}P_n$  相切。

$$C'(0) = n(P_1 - P_0), \quad C'(1) = n(P_n - P_{n-1})$$

# Bezier曲线

3) 端点的曲率：在 $C(u)$ 两端点的曲率分别为：

$$K(0) = \frac{n-1}{n} \frac{|P_0P_1 \times P_1P_2|}{|P_0P_1|^3}$$

$$K(1) = \frac{n-1}{n} \frac{|P_{n-2}P_{n-1} \times P_{n-1}P_n|}{|P_{n-1}P_n|^3}$$

这是因为

$$C''(u) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} (P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i) B_{i,n-2}(u)$$

$$C''(0) = n(n-1)(P_2 - 2P_1 + P_0)$$

$$C''(1) = n(n-1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2})$$

# Bezier曲线

## 4) 对称性

若保持原全部顶点的位置不变，只是把次序颠倒过来，则新的Bezier曲线形状不变，但方向相反。

## 5) 几何不变性

Bezier曲线的位置和形状只与特征多边形的顶点的位置有关，它不依赖坐标系的选择。移动第 $i$ 个控制顶点将对曲线上参数为  $\frac{i-1}{n-1}$  的那个点处发生最大的影响。

# Bezier曲线

## 6) 凸包性

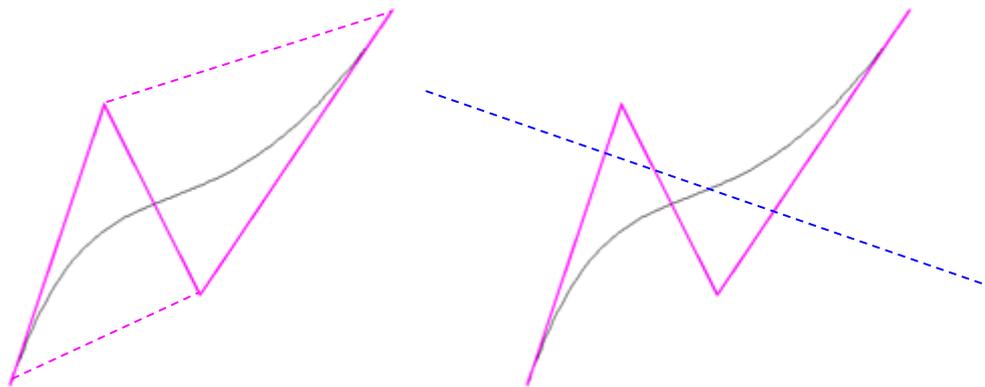
因为是多边形各顶点  $P_0, P_1, \dots, P_n$  的加权平均, 而权因子  $0 \leq B_{i,n}(u) \leq 1$ , 这反映在几何图形上有两重含义:

- a. Bezier曲线  $C(u)$  位于其控制顶点  $P_0, P_1, \dots, P_n$  的凸包之内;
- b. Bezier曲线  $C(u)$  随着其控制多边形的变化而变化;

# Bezier曲线

## 7) 变差缩减性

对于平面Bezier曲线 $C(u)$ ，平面内任意条直线与其交点的个数不多于该直线与其控制多边形的交点个数；



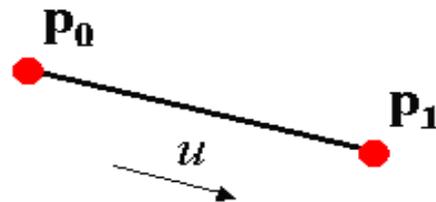
# Bezier曲线

## 常用Bezier曲线的矩阵表示

由Bezier曲线 $C(u)$ 的定义，可推出常用的一次、二次、三次Bezier曲线矩阵表示

1. 一次:  $C(t) = (1-t)P_0 + tP_1, t \in [0,1]$ ,

$$C(t) = [t, 1] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix}$$



2. 二次

$$C(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$



Degree 2

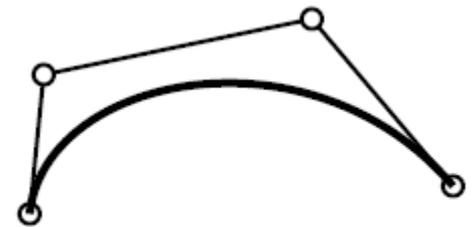
$$C(t) = [t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

# Bezier曲线

3 三次:

$$C(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3$$

$$C(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$



Degree 3

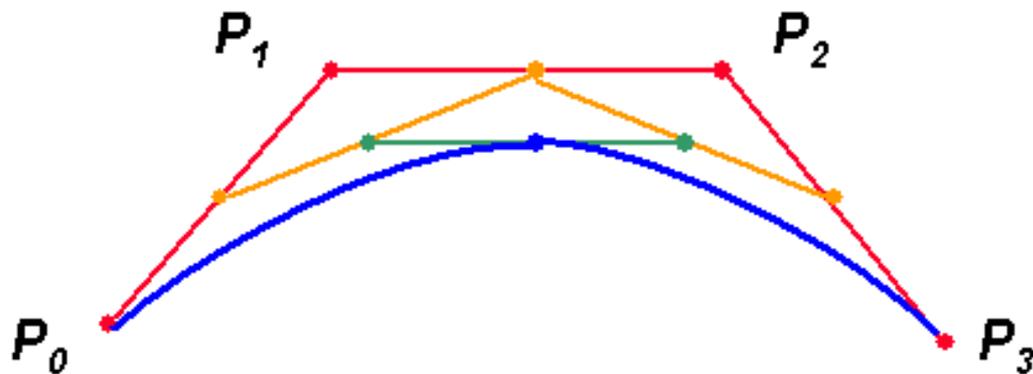
# Bezier曲线

## Bézier--- De Casteljau 算法

$P_0, P_1, \dots, P_n$ , 为Bézier曲线控制顶点,  $t$  为参数:

$$P_i^r(t) = (1-t)P_i^{r-1}(t) + tP_{i+1}^{r-1}(t), \text{ 其中 } \begin{cases} r = 1, \dots, n; i = 0, \dots, n-r \\ P_i^0(u) = P_i \end{cases}$$

则  $P_0^n(t) = C(t)$ .



# Bezier曲线

DeCasteljau (P,n,u,C)

```
{ /* Compute point on a Bezier curve using DeCasteljau
   algorithm */
  /* Input : P,n,u */
  /* Output: C (a point) */
  for(i=0;i<=n;i++ )
    Q[i]=P[i] ;
  for(k=1; k<=n; k++)
    for(i=0; i<=n-k; i++)
      Q[i]=(1.0-u)*Q[i]+u*Q[i+1] ;
  C=Q[0] ;
}
```

# Bezier曲线

## Bezier曲线的升阶

有时为了便于Bezier曲线的修改，需要增加控制顶点提高灵活性，而不要改变原来曲线的形状，也就是将n次的Bezier曲线进行升级表达为n+1次的Bezier曲线，即：

$$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(u) = \sum_{i=0}^{n+1} P'_i B_{i,n+1}(u)$$

- 只需将左边乘以  $[u + (1 - u)]$  然后比较
- $u^i (1 - u)^{n+1-i}$  的系数，即可得到

$$P'_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n+1$$

# Bezier曲线

- 几何意义：
  - 1) 新的控制顶点是对老的特征多边形在参数处进行线性插值的结果；
  - 2) 升阶后的新的特征多边形在老的特征多边形的凸包内；
  - 3) 升阶后的新的特征多边形更逼近Bezier曲线；

# Bezier曲线

- 例如对于二次Bezier曲线:

$$P(u) = \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

- 升阶后的控制顶点为

$$P'_0 = P_0$$

$$P'_1 = \frac{1}{3} P_0 + \frac{2}{3} P_1$$

$$P'_2 = \frac{2}{3} P_1 + \frac{1}{3} P_2$$

$$P'_3 = P_2$$

# Bezier曲线

- **Bezier曲线的顶点反求**
- 已知Bezier曲线上给定参数处的位置矢量和参数阶次，利用Bezier曲线定义和端点特性，可列出一组方程，求解方程组，就可得到相应的控制顶点。

例子：

已知三次Bezier曲线上的四个点分别为

$Q_0(120, 0)$ ,  $Q_1(45, 0)$ ,  $Q_2(0, 45)$ ,  $Q_3(0, 120)$ ,  
它们对应的参数分别为0,  $1/3$ ,  $2/3$ , 1, 反求  
三次Bezier曲线的控制顶点。

由已知条件可得方程组：

# Bezier曲线

$$Q_0 = P_0 \quad (t=0)$$

$$Q_1 = (8/27)P_0 + (4/9)P_1 + (2/9)P_2 + (1/27)P_3 \quad (t=1/3)$$

$$Q_2 = (1/27)P_0 + (2/9)P_1 + (4/9)P_2 + (8/27)P_3 \quad (t=2/3)$$

$$Q_3 = P_3 \quad (t=1)$$

bezier 曲线的端点性质得到的；其余两式是由三次 Bezier 曲线的展开式：

$$C(u) = (1-u)^3 P_0 + 3u(1-u)^2 P_1 + 3u^2(1-u) P_2 + u^3 P_3$$

分别将  $Q_0$ 、 $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$  的  $x$ 、 $y$  坐标代入方程组求解，可得：

$$x_0 = 120 \quad x_1 = 35 \quad x_2 = -27.5 \quad x_3 = 0$$

$$y_0 = 0 \quad y_1 = -27.5 \quad y_2 = 35 \quad y_3 = 120$$

# Bezier曲线

有理 Bézier 曲线:

$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)\omega_i P_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)\omega_i} = \sum_{i=0}^n R_{i,n}(t)P_i$$

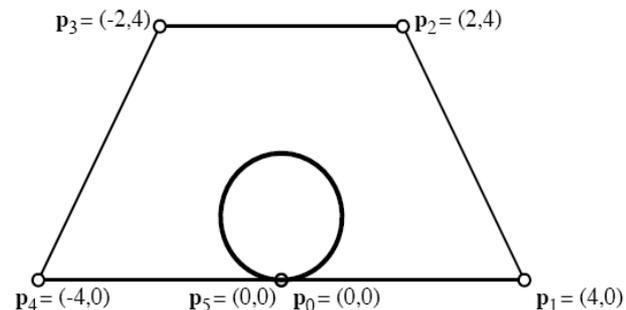


Figure 2.19: Circle as Degree 5 Rational Bézier Curve.

$B_{i,n}(t)$  为 Bernstein 基函数,  $\omega_i$  是  $p_i$  处的权值.

作为 Bézier 曲线的推广, 有理 Bézier 曲线可以表示圆等更多的曲线.

# Bezier曲线

其性质包括：

1) 端点性质：

$$R(0) = P_0;$$

$$R(1) = P_n$$

2) 端点切矢量

$$R'(0) = n \frac{\omega_1}{\omega_0} (P_1 - P_0);$$

$$R'(1) = n \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} (P_n - P_{n-1})$$

3) 凸包性质；

4) 有理再生性；若控制顶点落在一条直线上，曲线为直线；

5) 仿射和透视不变性；

# Bezier曲线

其性质包括：

6) 权因子的作用：当权因子全为零时，曲线与控制顶点无关；当某一权因子增大（小）时，曲线向相应的控制顶点靠近（远）；当权因子为无穷大时，该控制顶点即为曲线上的点。

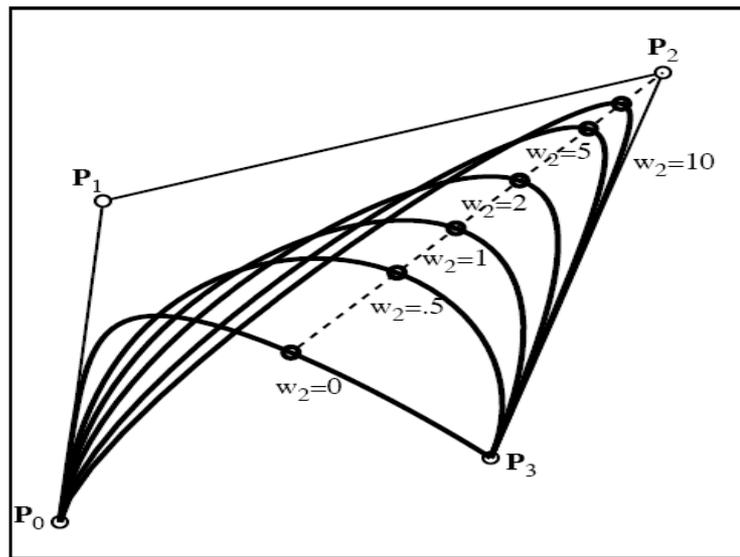


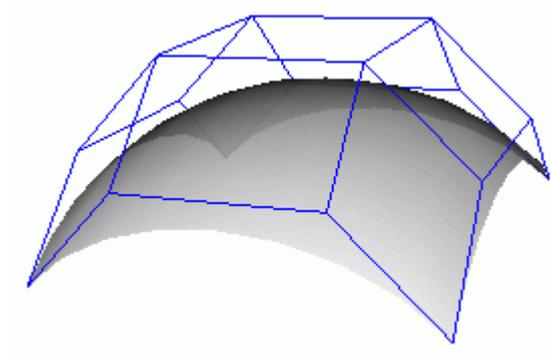
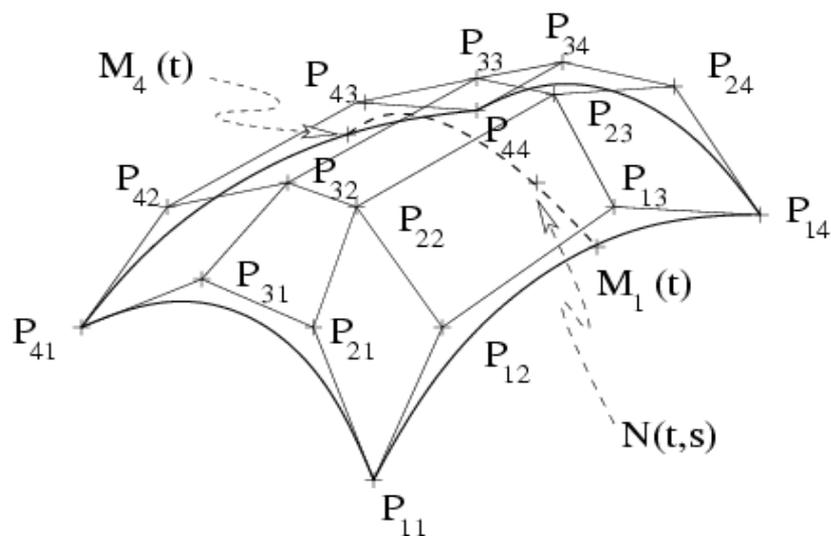
Figure 2.16: Rational Bézier curve.

# Bézier 曲面

## Bézier 曲面

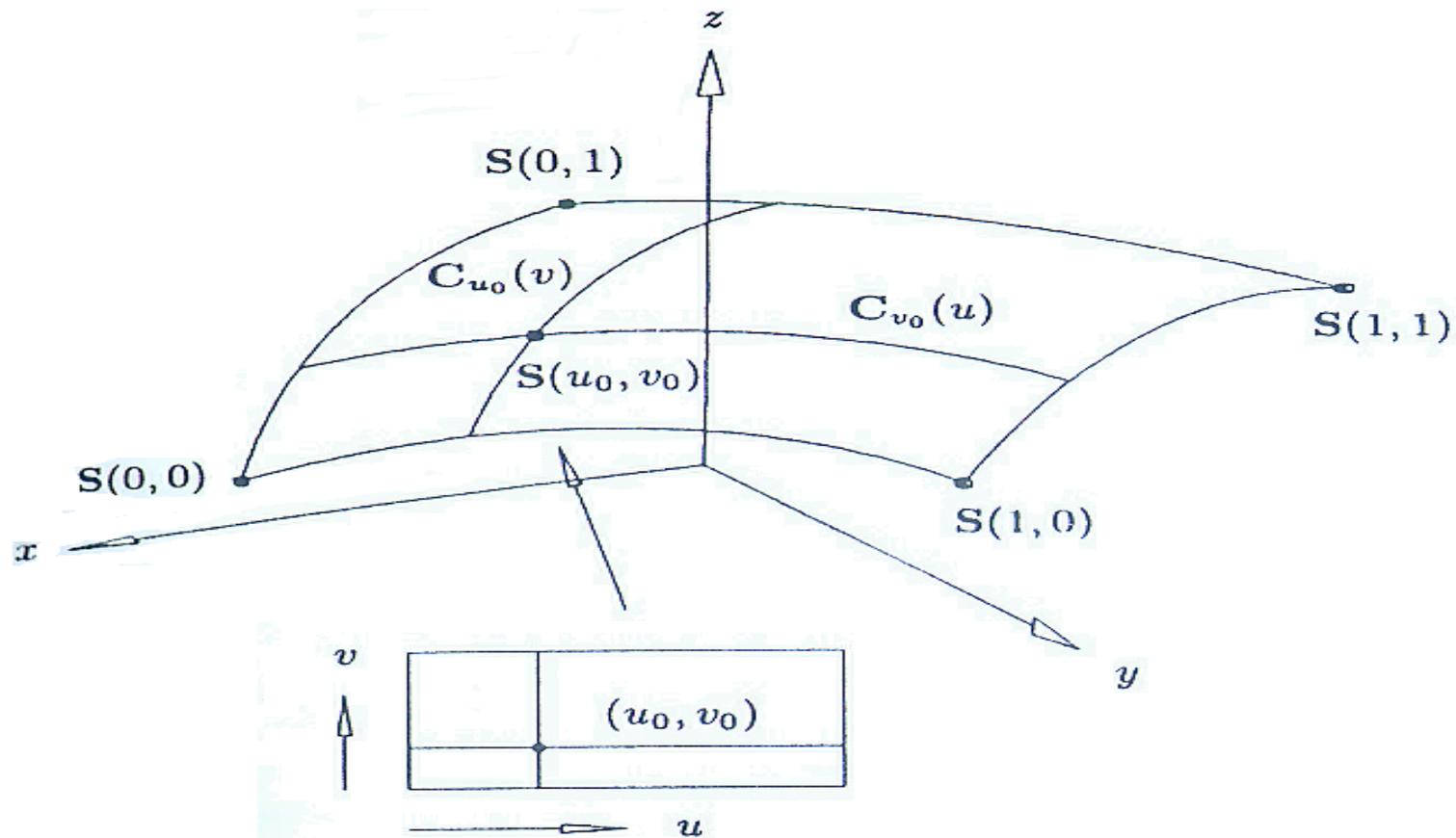
$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v), \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

$B_{i,n}(u)$ 和 $B_{j,m}(v)$ 为Bernstein基函数,  $(n+1) \times (m+1)$   $P_{i,j}(i=0,1,\dots,n; j=0,1,\dots,m)$ 一般称为Bezier曲面的控制顶点



# Bézier 曲面

控制网格  $\{P_{ij}\}$  是  $S(u, v)$  的大致形状勾画;  $S(u, v)$  是对  $\{P_{ij}\}$  的逼近。



# Bézier 曲面

性质

•Bezier曲面  $S(u, v)$  具有以下性质:

1) 端点位置:

四个端点分别是  $P_{00}, P_{0m}, P_{n0}, P_{nm}$  这是因为

$$P_{00} = S(0,0), P_{0m} = S(0,1)$$

$$P_{n0} = S(1,0), P_{nm} = P(1,1)$$

2) 边界曲线

$S(u, v)$  的四条边界  $S(0, v), S(u, 0), S(1, v), S(u, 1)$

线分别是以  $P_{00}P_{01}P_{02}\dots P_{0m}$   $P_{00}P_{10}P_{20}\dots P_{n0}$

$P_{n0}P_{n1}P_{n2}\dots P_{nm}$   $P_{0m}P_{1m}P_{2m}\dots P_{nm}$

为控制多边形的Bezier曲线

# Bézier 曲面

## 3) 凸包性

曲面  $S(u, v)$  位于其控制顶点  $P_{ij}$  ( $i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$ ) 的凸包内。

## 4) 几何不变性

曲面  $S(u, v)$  的形状和位置与坐标系的选取无关，仅仅与各控制顶点的位置有关。

## 5) 变差递减性

对于Bezier曲面，空间任意条直线与其交点的个数不多于该直线与其控制多边形的交点个数；

# Bézier 曲面

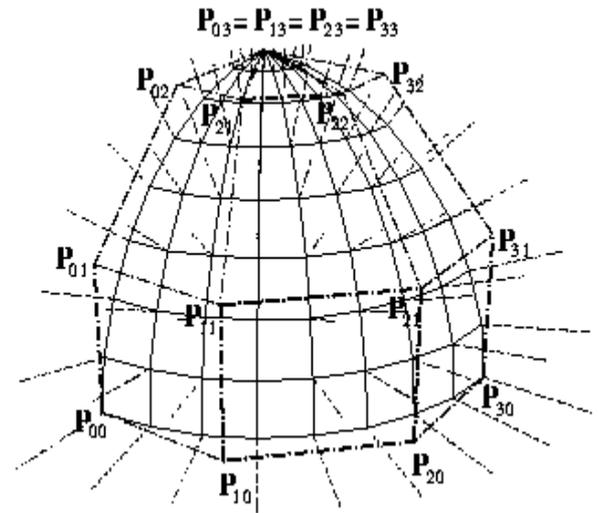
## Bézier 曲面的法向

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{S}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{ij} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) = n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m (\mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{ij}) B_{i,n-1}(u) B_{j,m}(v)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \mathbf{S}(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{ij} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) = m \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} (\mathbf{P}_{i,j+1} - \mathbf{P}_{ij}) B_{i,n}(u) B_{j,m-1}(v)$$

法向  $N(u, v)$  :

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{S}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}(u, v)}{\partial v}$$

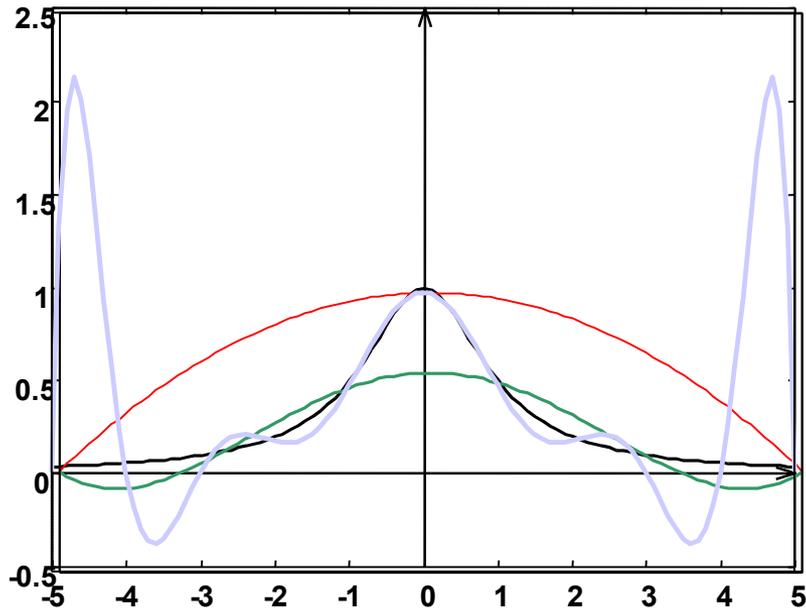


# NURBS 曲线

- Bézier 曲线的缺点:

1.控制点决定曲线的次数。控制点多意味着曲线高次。高次多项式缺陷如图。

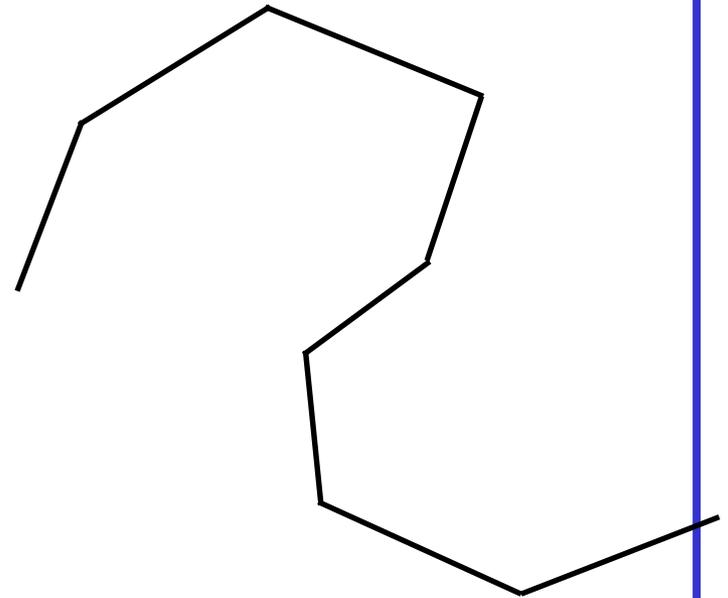
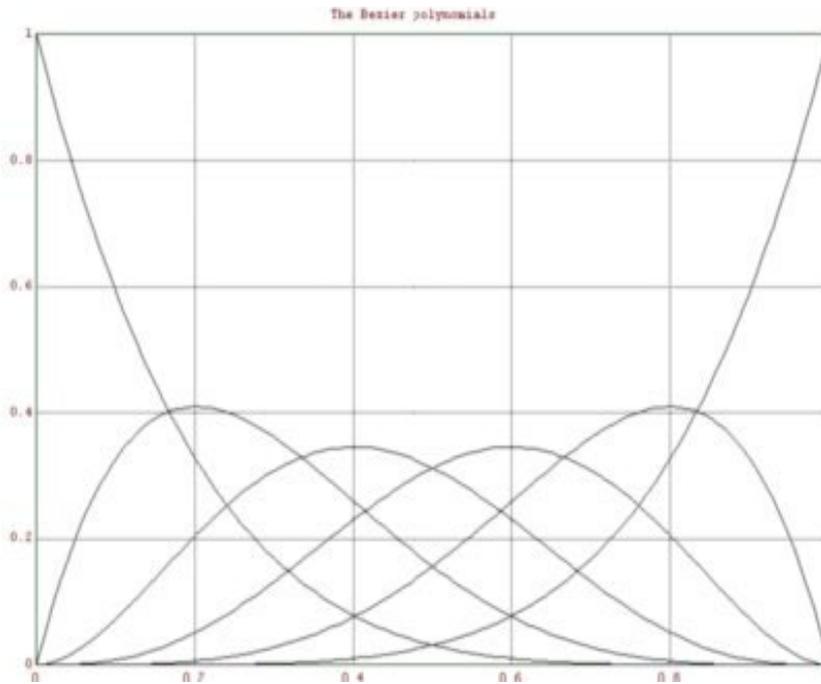
$$C(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t), \quad t \in [0,1]$$



# NURBS curve

- Bézier 曲线的缺点:
  2. 全局性. 每个控制顶点对整条曲线都有影响。

$$C(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t), \quad t \in [0,1]$$



# NURBS 曲线

B-spline 曲线:

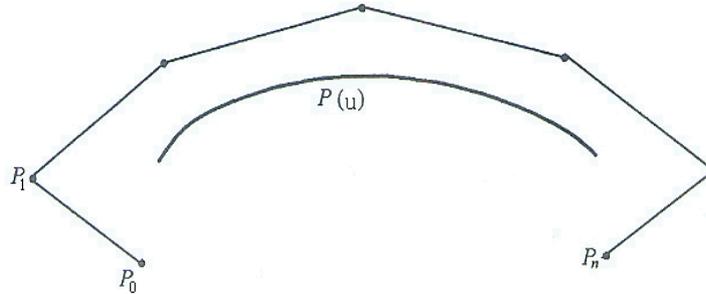
$$C(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,p}(u) \quad a \leq u \leq b$$

$P_0, P_1, \dots, P_n$  为控制顶点,  $\mathbf{u}=[u_0=a, u_1, \dots, u_i, \dots, u_{n+k+1}=b]$  为节点向量.

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u),$$

$$\frac{0}{0} = 0$$



# NURBS 曲线

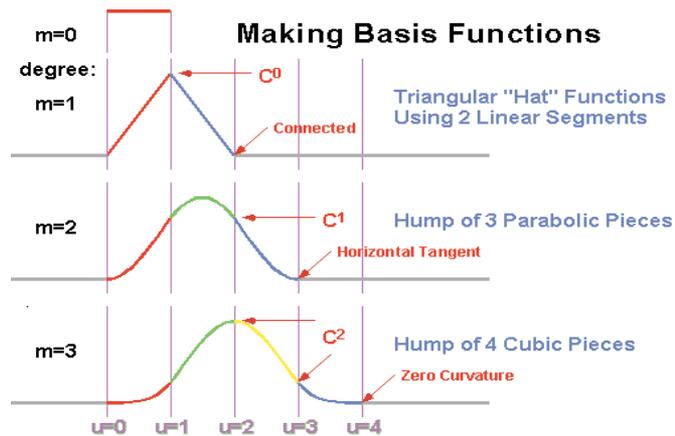
$$C(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,p}(u) \quad a \leq u \leq b \quad U = \{u_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$$

## B-spline 基:

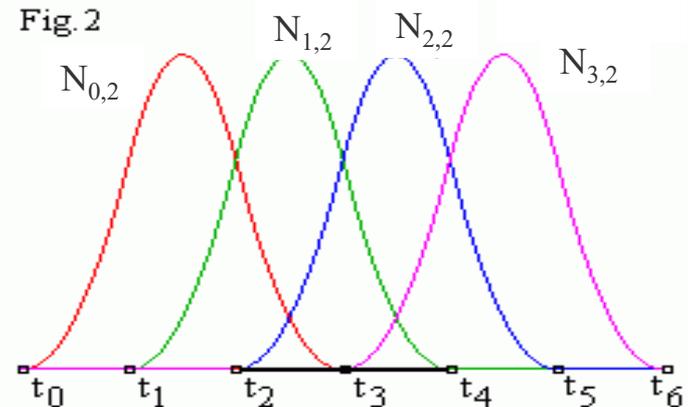
$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u),$$

$$\frac{0}{0} = 0$$



## 寻找局部支撑基



# NURBS 曲线

## B-spline basis的特性

1. 局部性:  $N_{i,p}(u) > 0$  only when  $u \in [u_i, u_{i+p+1}]$ .

$$N_{i,p}(u) = \begin{cases} > 0, & u_i \leq u < u_{i+p+1} \\ = 0, & u < u_i \text{ 或 } u > u_{i+p+1} \end{cases}$$

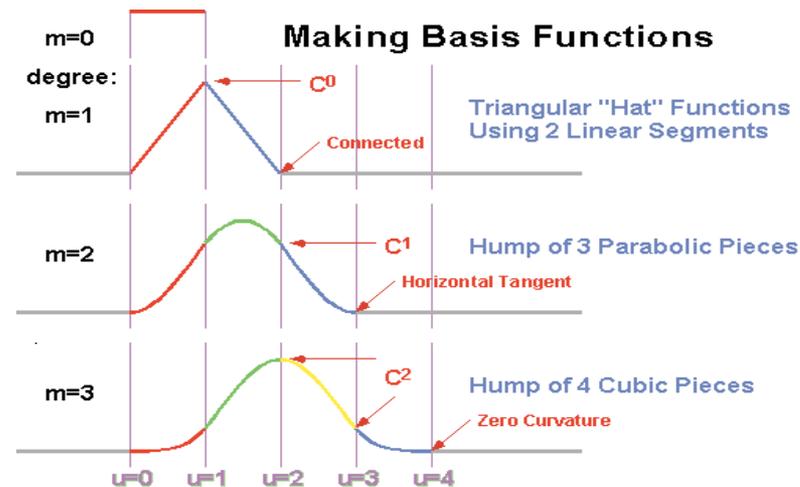
2. 规范性:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} N_{j,p}(u) = \sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(u) = 1, u \in [u_i, u_{i+1})$$

3. 分段多项式:  $N_{i,p}(u)$  是在每段  $[u_j, u_{j+1})$  上是次数  $< p$  的分段多项式

4. 可微:

$$N'_{i,p}(u) = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

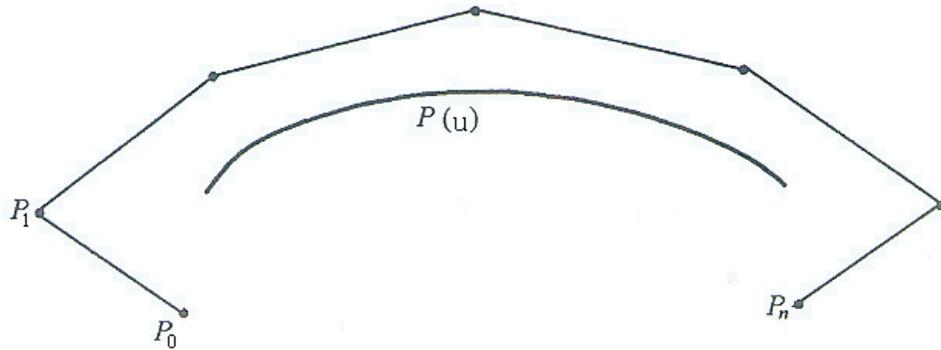


# NURBS 曲线

## B样条曲线的性质

严格的凸包性:

曲线严格位于控制多边形的凸包内; 如果  $u \in [u_i, u_{i+1})$   
 $p \leq i < m - p - 1$ ,  $C(u)$  位于控制顶点  $P_{i-p}, \dots, P_i$   
所建立的凸包内;



B样条曲线凸包性

# NURBS 曲线

## 2.分段参数多项式:

$C(u)$  在每一区间  $u \in [u_i, u_{i+1})$  上都是次数不高于  $p$  的多项式;

## 3.可微性或连续性:

$C(u)$ 在每一曲线段内部是无限次可微的，在定义域内重复度为 $k$ 的节点处则 $p-k$ 次可微。

## 4.几何不变性:

B样条曲线的形状和位置与坐标系的选取无关。

# NURBS 曲线

## 5. 局部可调性:

因为  $N_{i,p}(u)$  只在区间  $[u_i, u_{i+p+1})$  中为正, 在其它地方均取零值, 使得  $p$  次的B样条曲线在修改时只被相邻的  $p+1$  个顶点控制, 而与其它顶点无关。当移动其中的一个顶点  $P_i$  时, 只影响到定义在区间  $[u_i, u_{i+p+1})$  上那部分曲线, 并不对整条曲线产生影响。

## 6. 近似性:

控制多边形是B样条曲线的线性近似, 若进行节点插入或升阶会更加近似; 次数越低, B样条曲线越逼近控制顶点;

# NURBS 曲线

## 7. 变差缩减性:

B样条曲线的控制多边形, 某平面与B样条曲线的交点个数不多于该平面与其控制多边形的交点个数

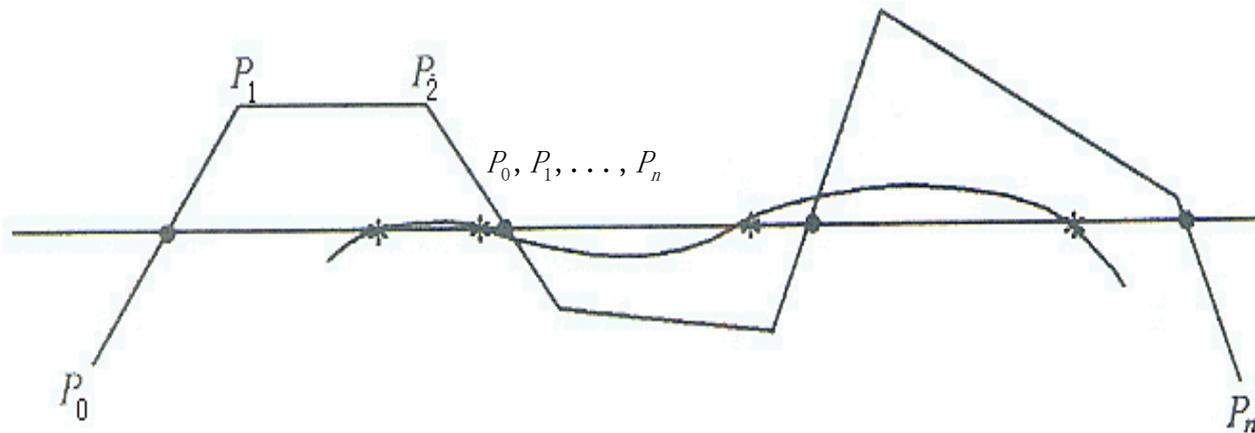


图8.13 B样条曲线的变差缩减性

# NURBS 曲线

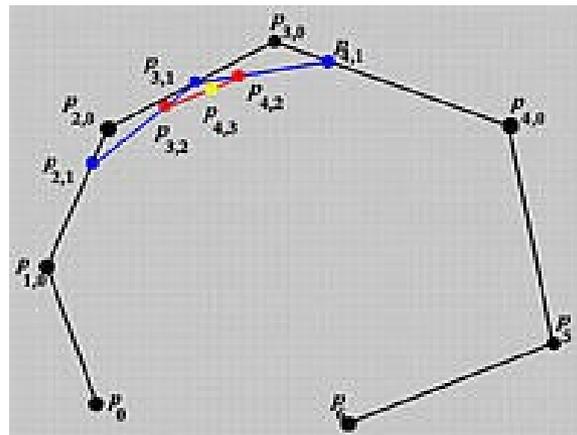
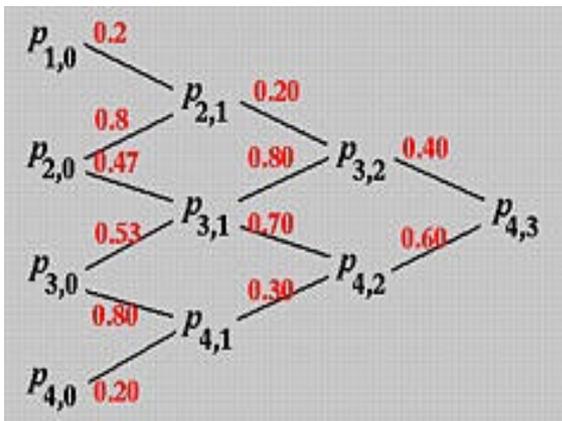
## de Boor 算法

计算B-spline曲线 $C(u)$ 在 $u$ 处的点:

1. 确定 $u$  所处参数区间:  $u \in [u_j, u_{j+1})$ ;
2.  $u \in [u_j, u_{j+1})$  只决定于控制点  $P_{j-p}, P_{j-p+1}, \dots, P_j$ ;
3. 计算

$$P_i^r(u) = \begin{cases} P_i & r=0, i=j-p; j-p+1, \dots, j; \\ \frac{u-u_i}{u_{i+k-r}-u_i} P_i^{r-1}(u) + \frac{u_{i+k-r}-u}{u_{i+k-r}-u_{i-1}} P_{i-1}^{r-1}(u), & r=1, 2, \dots, k-1; i=j-p+r, j-p+r+1, \dots, j. \end{cases}$$

4.  $P_j^{k-1}(u) = C(u)$

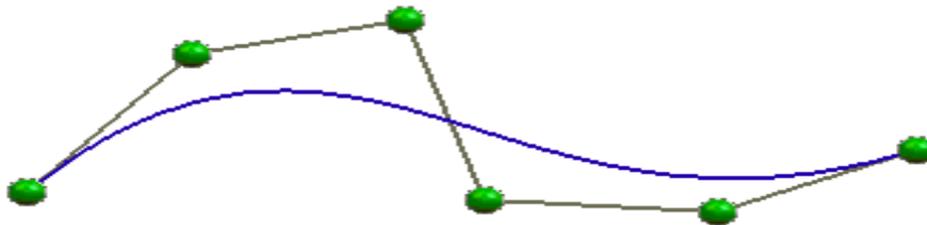


# NURBS 曲线

NURBS(Non-uniform Rational B-spline)

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i}, \quad a \leq u \leq b$$

$$U = \{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \}$$



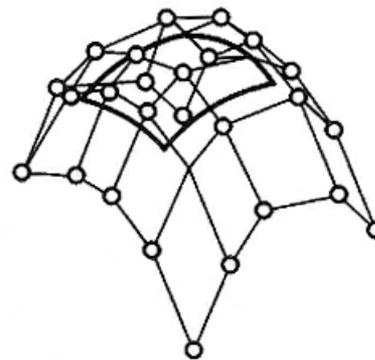
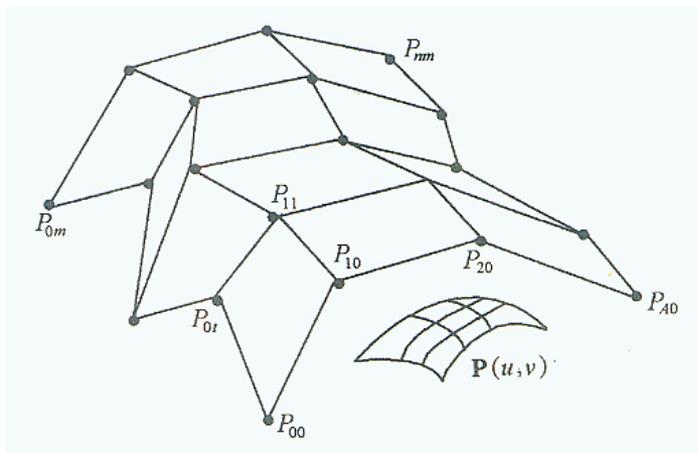
# NURBS 曲面

给定  $(n+1) \times (m+1)$  控制点  $P_{ij}$ ,

$u, v$  的次数:  $p, q$ ;

节点  $U=[u_0, u_1, \dots, u_{n+p+1}]$ ,  $V=[v_0, v_1, \dots, v_{m+q+1}]$ , 则  $p \times q$  的张量积 B 样条曲面定义如下:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j}$$



# NURBS 曲面

## NURBS 曲面

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \omega_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \omega_{i,j}} \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

$\omega_{ij}$ : 权值

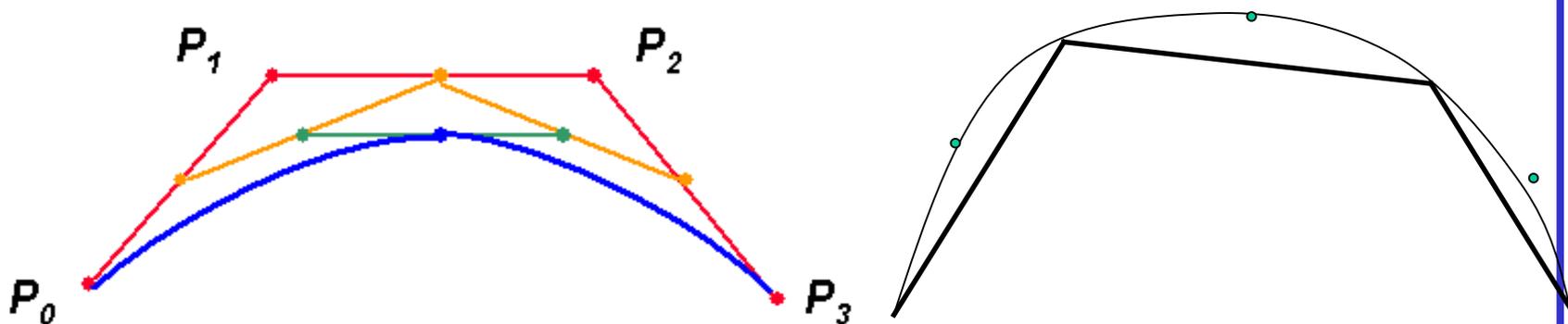
$$U = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\}$$

$$V = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1}\}$$

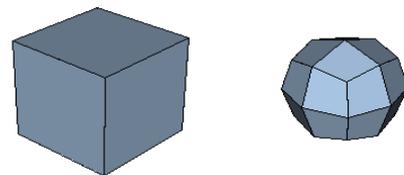
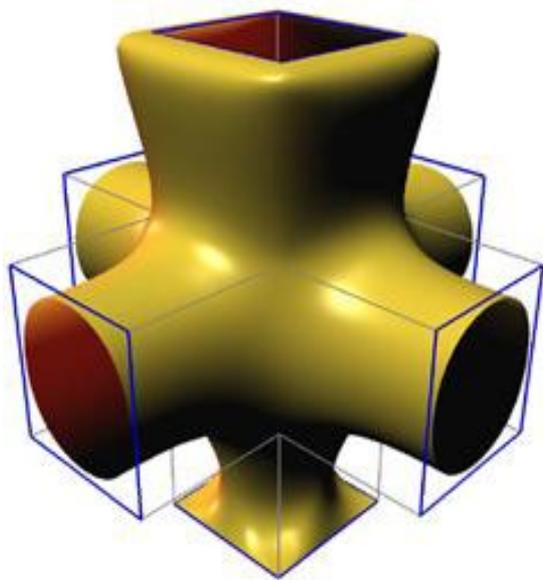
# 细分曲面

## 细分曲线:

- 从一组控制顶点开始,按一定的规则加密这组顶点得到下一层顶点,将这一过程不断重复,在某些规则下会收敛到光滑曲线。Bézier曲线和NURB曲线都具有这一特性。



# 细分曲面



# 细分曲面

## Catmull-Clark and Doo-Sabin 细分

i层网格

$$P^i = (\cdots, p_{-1}^i, p_0^i, p_1^i, p_2^i, \cdots)$$

Catmull-Clark rules

$$p_{2j}^{i+1} = \frac{1}{8} p_{j-1}^i + \frac{6}{8} p_j^i + \frac{1}{8} p_{j+1}^i$$

$$p_{2j+1}^{i+1} = \frac{4}{8} p_j^i + \frac{4}{8} p_{j+1}^i$$

Doo-Sabin rules:

$$p_{2j}^{i+1} = \frac{3}{4} p_j^i + \frac{1}{4} p_{j+1}^i$$

$$p_{2j+1}^{i+1} = \frac{1}{4} p_j^i + \frac{3}{4} p_{j+1}^i$$

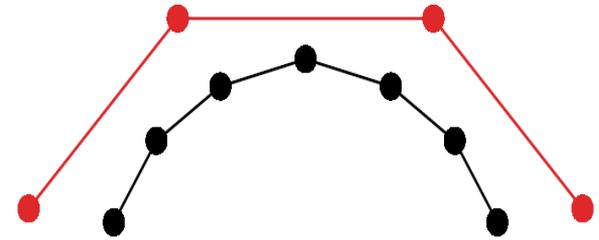
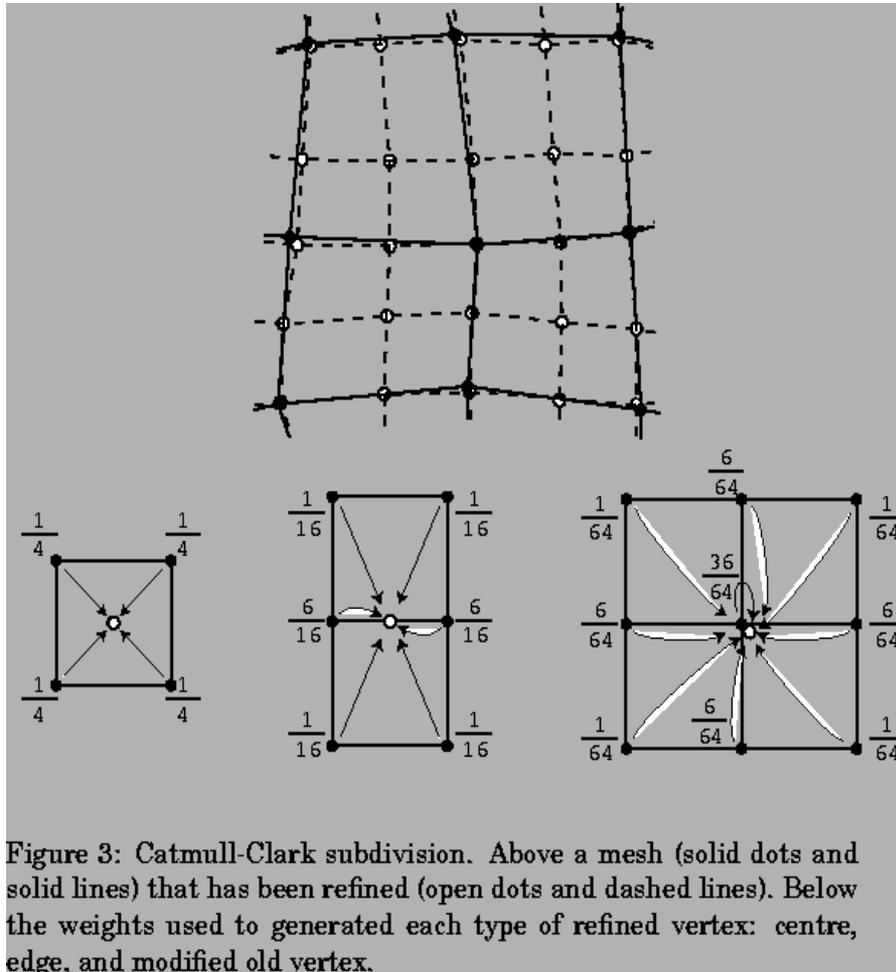


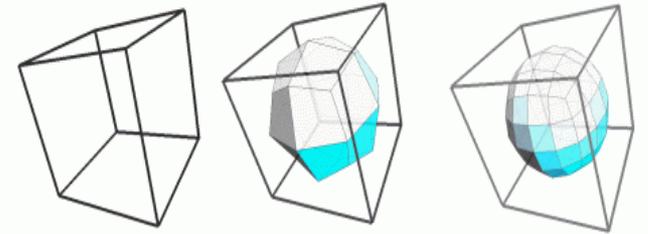
Figure 3: Subdividing an initial set of control points (upper, red) results in additional control points (lower, black), that more closely approximate a curve.

# 细分曲面

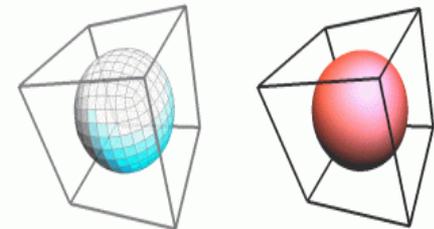
## Catmull-Clark 细分



### ◆ Catmull-Clark subdivision surfaces



Original Cube The 1st subdivision The 2nd subdivision

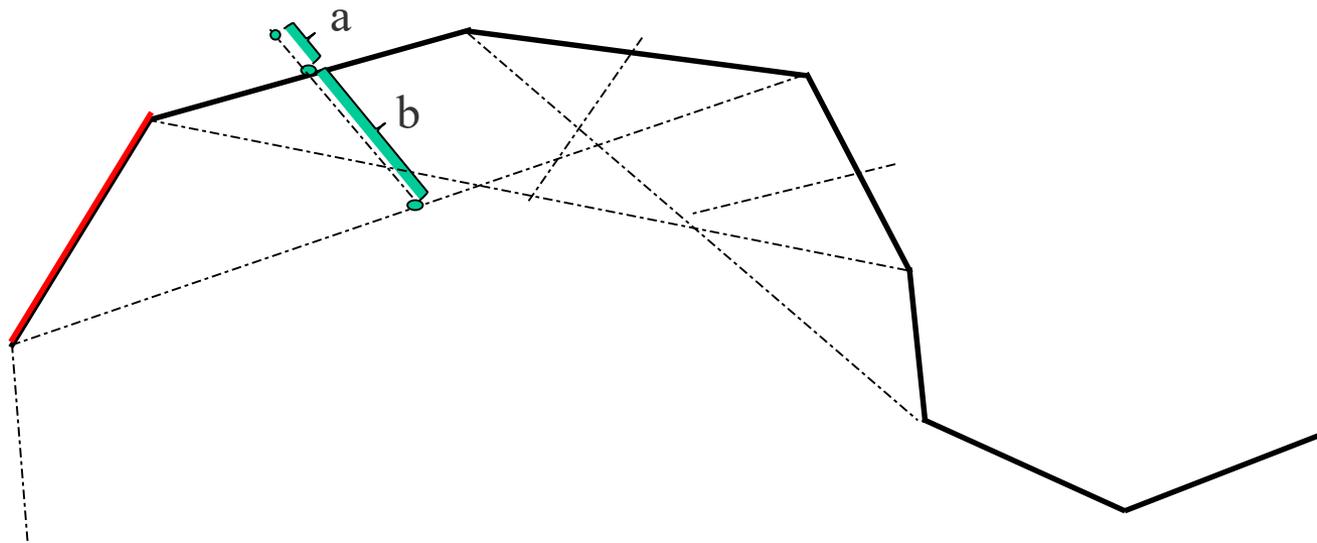


The 3rd subdivision The 5th subdivision

# 细分曲面

四点法

如果 $a/b < 0.125$ , 则收敛。特点：插值。



# 细分曲面

## 优点

1. 可生成拓扑复杂形状;
2. 稳定;
3. 易实现;
4. 无需曲面间的拼接
5. LOD .

谢 谢